

# **Szybka transformacja Fouriera**

(Opis i wydruki programów)

Instytut Astronomii UMK, Toruń  
1976

K. Borkowski

## PROGRAM OBLICZANIA TRANSFORMAT FOURIERA

### Wstęp

Prezentowany tutaj program przeznaczony jest do obliczania obu transformat Fouriera na minikomputerze MOMIK 8b. Algorytm programu wywodzi się z następujących definicji dyskretnych przekształceń Fouriera (dalej zwanych DFT lub, dla transformaty odwrotnej, IDFT).

$$A_r = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} z_k W^{rk}, \quad r = 0, 1, \dots, N-1 \text{ oraz}$$

$$z_l = \sum_{r=0}^{N-1} A_r W^{-rl}, \quad l = 0, 1, \dots, N-1,$$

gdzie  $W = \exp(2\pi j/N)$ ,  $j^2 = -1$ .

Własności DFT z małymi modyfikacjami pokrywają się z własnościami całkowych postaci przekształcenia Fouriera. Tak np., DFT ciągu przesuniętego cyklicznie o  $h$  wyrazów jest DFT tego ciągu, pomnożoną przez  $W^{-rh}$  a DFT sumy dwóch funkcji jest sumą DFT tych funkcji. Inną bardzo pożyteczną własnością DFT jest ich związek z dyskretnym splotem (konwolucją lub filtrowaniem) a zatem także z dyskretną funkcją autokorelacyjną jako szczególnym przypadkiem splotu. Otóż można pokazać, że IDFT iloczynu dwóch DFT otrzymanych z dwóch ciągów jest dyskretnym splotem tych ciągów jeżeli tylko połowa wyrazów każdego z ciągów (np., pierwsze  $N/2$  wyrazy) będzie identyczna z zerem, co zawsze można zapewnić podczas przygotowywania danych.

Do opracowania programu wykorzystano jeden z algorytmów tzw. szybkiej transformacji Fouriera (FFT) przedstawionych w pracy Cochrana i in. (1967)\* Jest to metoda polegająca na rozbięciu operacji DFT w czasie, zapewniająca maksymalne wykorzystanie pojemności pamięci operacyjnej (PAO) komputera. Program został napisany w języku symbolicznym Systemu Biurowego MERA 302/303. Przekształcanie ciągu 128 liczb zespolonych (jest to zarazem górna granica) trwa ok. 35 minut.

\*W.T.Cochran, J.W.Cooley, D.L.Favin, H.D.Helms, R.A.Kaenel, W.W.Lang, G.C.Maling, D.E.Nelson, C.M.Rader, P.D.Welch, *What in the Fast Fourier Transform?*, IBEE Trans. Audio and Electroacoustics, vol. **15**, No. 2, June 1967.

### Algorytmy

Do obliczania funkcji sinus i cosinus, występujących w DFT (FFT) w wyrażeniu  $W^k = \cos(2\pi k/N) - j \sin(2\pi k/N)$ , wykorzystano następujące zależności:

$$\sin(2\pi k/N) = (-1)^m \sin(2\pi k/N - m\pi) = \sin x,$$

gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą a  $|x| \leq \pi/2$ ,

$$\cos x' = \sin(2.5\pi - x')$$

$$\sin x \approx ((a_7 x^2 + a_5) x^2 + a_3) x^2 + a_1) x,$$

gdzie:  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = -0.166657$ ,  $a_5 = 0.0083132$ ,  $a_7 = -0.0001852$ . Funkcje te wypełniają część programu pomiędzy etykietami oznaczonymi numerami 6 i 7 oraz w podprogramie oznaczonym etykietą 20.

Sposób znajdowania transformacji ilustruje schemat blokowy na rys. 1. Istotą algorytmu jest obliczanie transformat cząstkowych obejmujących kolejno  $N/2$ ,  $N/4$ ,  $N/8, \dots$ , 4, 2 i 1 elementów

pierwotnego ciągu danych i jednocześnie składanie ich w transformatę ostateczną. Zysk w szybkości działania takiej procedury uzyskuje się dzięki związkowi  $W^{k-N/2} = -W^k$ . Na rys. 2 pokazano schemat operacji wykonywanych podczas FFT dla przypadku gdy  $N = 8$ . Kolejne stany PAO uwidaczniają się tam w węzłach siatki rozmieszczonych równoległe do danych wejściowych  $z_k$ . Liczba zespolona odpowiadająca danemu węzłowi jest ważoną sumą liczb z dwu innych węzłów. Strzałki symbolizują kierunki przesyłania liczb a przypisane im wagi  $W^l$  zaznaczono obok strzałek.

Funkcja  $F(k,n)$  występująca w schemacie (rys. 1) obliczana jest wg wzoru:

$$F(k,n) = \sum_{i=1}^n 2^{n-1} \{E(k/2^{i-1}) - 2E(k/2^i)\},$$

gdzie  $E$  oznacza całość a  $n = \lg_2 N$ . Obliczenia wykonywane są w podprogramie oznaczonym etykietą "14" (argument instrukcji **sk** i **wa**).

Pamiętanie danych i wyników w PAO zorganizowano w ten sposób, że  $Re z_k$  i  $Re A_k$  mieszczą się w rejestrze pamięciowym o numerze  $k$  a  $Im z_k$  i  $Im A_k$  w rejestrze  $k+N$ .

### Użytkowanie programu

Wczytanie i uruchomienie programu odbywa się na zasadach ogólnych Systemu Biurowego. W programie nie przewidziano możliwości zmian aktywnych wyjść i wejść, które są deklarowane przed uruchomieniem programu z klawiatury numerycznej w zależności od potrzeb użytkownika.

Dane z aktywnego urządzenia wejściowego należy wprowadzać w następującej kolejności:

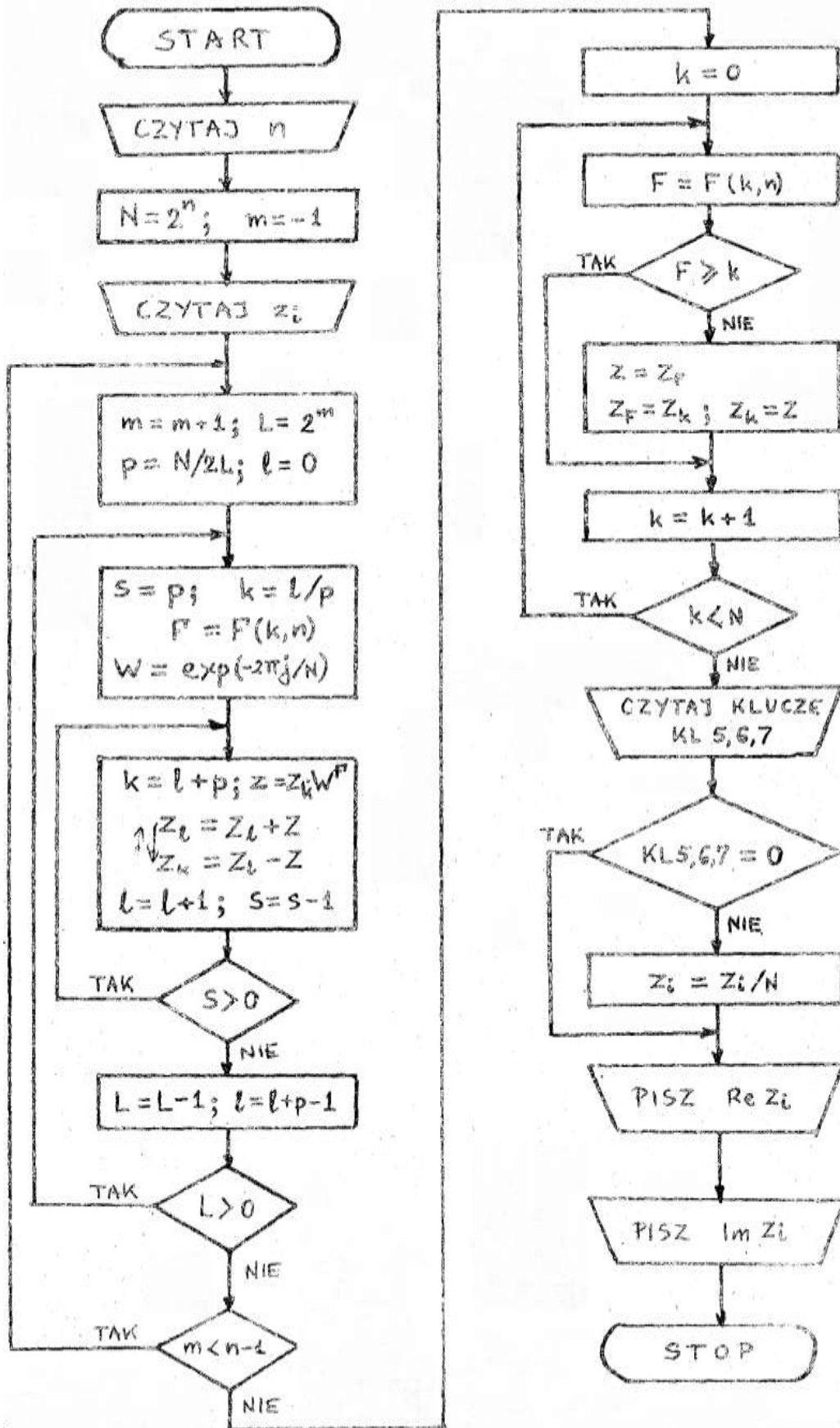
- Liczba  $n = \lg_2 N$ , gdzie  $N$  – ilość wyrazów ciągu danych.
- Kolejne liczby zespolone ciągu; najpierw część rzeczywista, następnie – urojona ( $Re z_0, Im z_0, Re z_1, Im z_1, \dots$ ).

Po uruchomieniu program realizuje DFT. W celu uzyskania transformaty odwrotnej (IDFT) dane należy podać w następującej kolejności:  $n, z_0, z_{N-1}, z_{N-2}, \dots, z_2, z_1$ . Ponadto, dla uzyskania właściwej normalizacji wyników, po wczytaniu należy wydusić klawisz „7” z rzędu „KL” na pulpicie technicznym. Tę procedurę można uzasadnić następująco: jeśli  $z_k = (1/N) A_r W^{rk}$ , to biorąc  $z'_k = z_{N-k}$  i  $z_N = z_0$  i wykonując ponowną transformację, dostaje się:

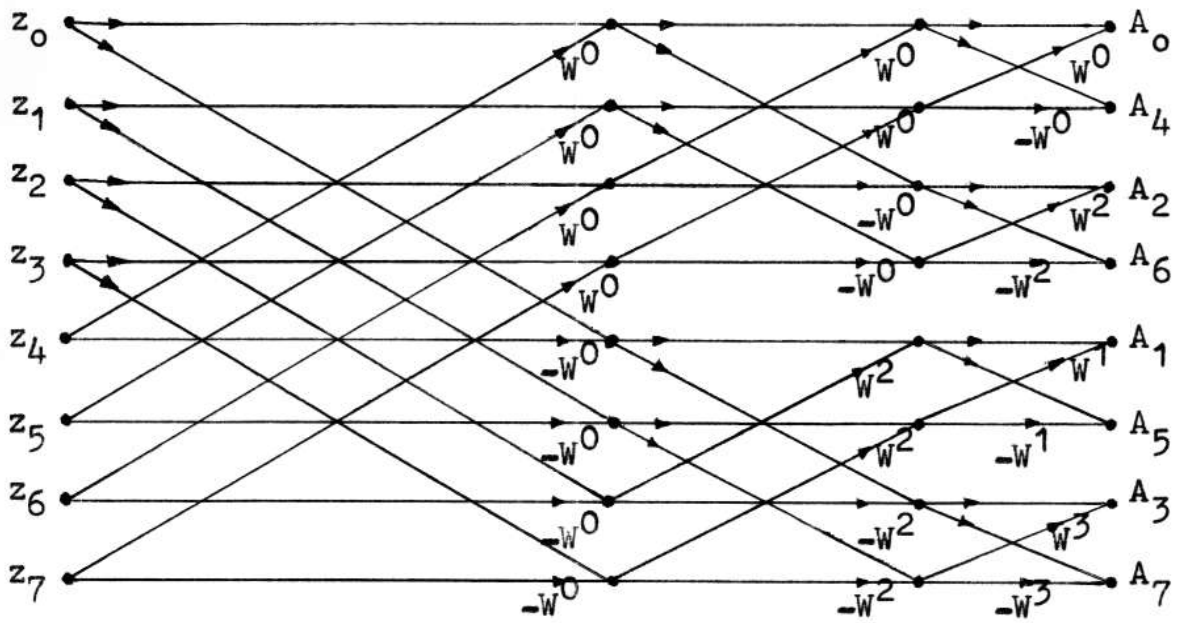
$$\begin{aligned} A_r' &= (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} z_k' W^{rk} = (1/N) \sum_k z_{N-k} W^{rk} = (1/N) \sum_k z_k W^{-r(N-k)} = \\ &= (1/N) \left( \sum_k z_k W^{-rk} \right) W^{Nr} = A_r/N. \end{aligned}$$

Wyniki obliczeń są wypisywane na aktywne wyjście w postaci tabeli, w kolejności:  $Re A_0, Re A_1, \dots, Re A_N, Im A_0, Im A_{N-1}$ , gdzie  $A_i$  – i-ty element transformaty Fouriera.

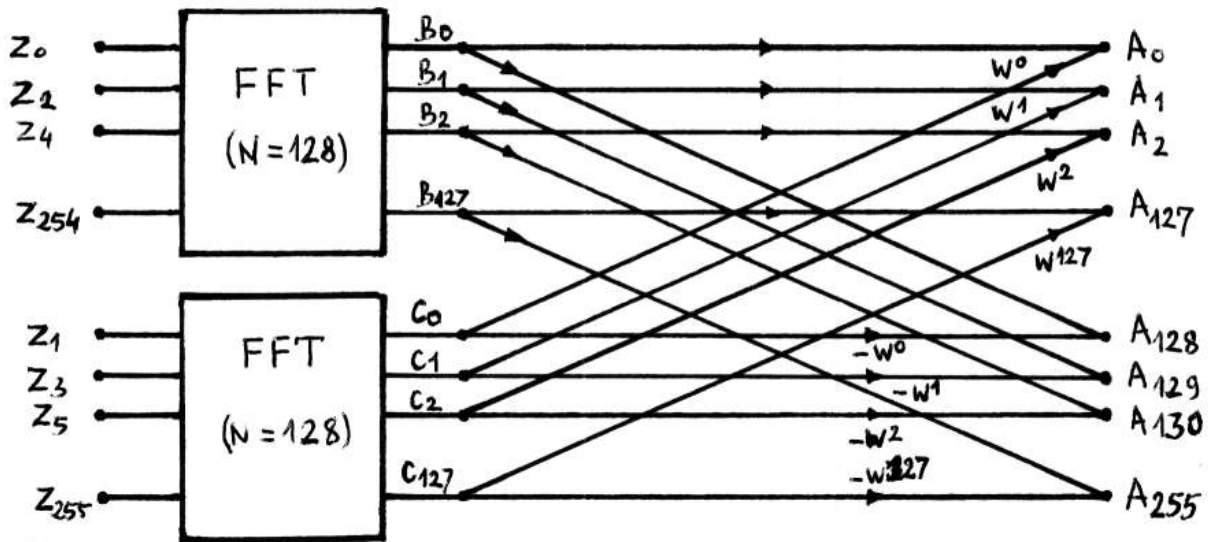
Warto zauważyć, że mimo że pojemność PAO MOMIKA ogranicza maksymalny ciąg danych poddawanych przekształceniu do 128 punktów, nie wyklucza to możliwości uzyskiwania transformat dłuższych ciągów. Rys. 3 pokazuje sposób postępowania w przypadku ciągu złożonego z 256 elementów. Jest to metoda podziału DFT w domenie czasowej. Analogicznie można uzyskać transformaty ciągu 512 punktów.



Rys. 1: Sieć działań



Rys. 2.



Rys. 3.

SZYBKA TRANSFORMACJA FOURIERA

<wersja z 24.03.1976>

5761 wl10;	5894 rz11,7;	6013 ro6,1;	6115 rd7,1;
5763 cp0,0;	5896 ri11,8;	6015 wi6;	6117 ur10,7;
5765 wt/FFT; n=/;	5898 wo14;	6017 ro5,1;	6119 kc8;
5774 qy0,1;	5900 lr3,3.14159265	6019 rz7,2;	6121 cn8;
5776 rz1,0;	5913 rz15,3;	6021 sr9;	6123 sr13;
5778 ri1,1;	5915 rm15,4;	6023 st3;	6125 ri10,2;
5780 rz2,1;	5917 rm15,10;	6025 dl0;	6127 dl13;
5782 rz4,1;	5919 ri15,2;	6025 ro1,4;	6127 zk10,1;
5784 rd4,4;	5921 rz13,3;	6027 dl8;	6129 cq10,3;
5786 rz6,0;	5923 ri13,4;	6027 ur11,7;	6131 pu10,6;
5788 dl1;	5925 ro13,15;	6029 ur12,10;	6133 ro5,1;
5788 rm2,4;	5927 wi18;	6031 zu12,7;	6135 wi12;
5790 ro6,1;	5929 ro15,3;	6033 zu11,10;	6137 ro3,4;
5792 wi1;	5931 ro1,4;	6035 rd7,2;	6139 wi11;
5794 cp10,5;	5933 ri15,1;	6037 rd10,2;	6141 wl10;
5796 wt/Zi:/;	5935 ri1,1;	6039 rm2,1;	6143 dz
5801 dl2;	5937 dl18;	6041 ms8;	
5801 qy10,9;	5937 wo20;	6043 rm1,1;	
5803 zu10,6;	5939 rz15,13;	6045 dl9;	
5805 qy10,9;	5941 rz13,11;	6045 ro7,1;	
5807 rd6,2;	5943 wo20;	6047 ms10;	
5809 zu10,6;	5945 rz9,8;	6049 rz11,7;	
5811 ro6,2;	5947 dl7;	6051 wo14;	
5813 rd6,1;	5947 rz3,7;	6053 pw7,10;	
5815 pw6,2;	5949 rd3,8;	6055 wi0;	
5817 ms2;	5951 rz1,2;	6057 st9;	
5819 rz5,0;	5953 rd1,7;	6059 sk14;	
5821 dl3;	5955 rd2,3;	6061 rz14,0;	
5821 rz7,0;	5957 ur14,3;	6063 rz10,0;	
5823 rz6,1;	5959 ur15,2;	6065 ro10,0;	
5825 ro7,5;	5961 rm15,13;	6067 dl15;	
5827 dl4;	5963 rm14,11;	6067 rz12,11;	
5827 sr5;	5965 rd14,15;	6069 ri11,4;	
5829 rm6,4;	5967 ur15,2;	6071 ro12,11;	
5831 ro7,1;	5969 rm15,11;	6073 ro12,11;	
5833 st4;	5971 ur12,3;	6075 rz15,14;	
5835 sk20;	5973 rm12,13;	6077 dl16;	
5837 rz11,15;	5975 ro15,12;	6077 ro15,1;	
5839 rm15,15;	5977 ur10,7;	6079 sr17;	
5841 lr12,1852-;	5979 ro10,14;	6081 rm12,4;	
5849 cp12,7;	5981 zu10,3;	6083 wi16;	
5851 rm12,15;	5983 ur10,1;	6085 dl17;	
5853 lr10,.0083132	5985 ro10,15;	6085 rd10,12;	
5864 rd12,10;	5987 zu10,2;	6087 ro14,1;	
5866 rm12,15;	5989 ur10,7;	6089 wi15;	
5868 lr10,.166657-;	5991 rd10,14;	6091 wa14;	
5878 rd12,10;	5993 zu10,7;	6093 dl10;	
5880 rm12,15;	5995 ur10,1;	6093 rd4,4;	
5882 rd12,1;	5997 rd10,15;	6095 rd4,4;	
5884 rm11,12;	5999 zu10,1;	6097 ts6,/B889.88-/;	
5886 wa20;	6001 ri1,1;	6107 rz3,2;	
5888 dl5;	6003 ro2,3;	6109 rd3,3;	
5888 rz8,2;	6005 rd7,1;	6111 dl11;	
5890 ri8,6;	6007 ro9,1;	6111 rz5,4;	
5892 ri8,4;	6009 wi7;	6113 wl10;	
5894 dl6;	6011 rd7,8;	6115 dl12;	

WIDMA MOCY PO FFT

<9.07.1976>

5761 lr3,.5;  
5766 rm3,2;  
5768 rd3,4;  
5770 wl10;  
5772 wt/WIDMO MOCY:/;  
5785 wl10;  
5787 lr4,8;  
5792 rz5,4;  
5794 lr0,0;  
5799 rz9,2;  
5801 dl0;  
5801 ur10,0;  
5803 ur11,9;  
5805 rm10,10;  
5807 rm11,11;  
5809 rd10,11;  
5811 rd0,1;  
5813 rd9,1;  
5815 ri10,2;  
5817 ri10,2;  
5819 dl1;  
5819 zk10,1;  
5821 cq10,3;  
5823 pu10,6;  
5825 pw0,3;  
5827 sr2;  
5829 ro5,1;  
5831 wi0;  
5833 wl10;  
5835 rz5,4;  
5837 st0;  
5839 dl2;  
5839 sh;  
5840 dz

$$p_i = \left| \frac{A_i}{N} \right|^2$$

<26.03.1976>

5761 lr3,.5;  
5766 rm3,2;  
5768 rd3,4;  
5770 wl10;  
5772 wt/WIDMO MOCY:/;  
5785 wl10;  
5787 lr4,8;  
5792 rz5,4;  
5794 lr0,0;  
5799 rz9,2;  
5801 dl0;  
5801 ur10,0;  
5803 ur11,9;  
5805 rm10,10;  
5807 rm11,11;  
5809 rd10,11;  
5811 rd0,1;  
5813 rd9,1;  
5815 wo56;  
5817 kc7;  
5819 cn7;  
5821 sr1;  
5823 ri10,2;  
5825 dl1;  
5825 zk10,1;  
5827 cq10,3;  
5829 pu10,6;  
5831 pw0,3;  
5833 sr2;  
5835 ro5,1;  
5837 wi0;  
5839 wl10;  
5841 rz5,4;  
5843 st0;  
5845 dl2;  
5845 sh;  
5846 sk56;  
5848 cq10,5;  
5850 wn60;  
5852 cn10;  
5854 ms60;  
5856 lr14,5;  
5861 rz11,14;  
5863 cp14,5;  
5865 cp11,2;  
5867 cq11,5;  
5869 lr12,.1;  
5874 rm11,10;  
5876 rd11,12;  
5878 dl57;  
5878 rz12,11;  
5880 rz13,10;  
5882 ri13,12;  
5884 rd13,12;  
5886 lr12,.5;  
5891 rm13,12;  
5893 rz12,11;  
5895 rz11,13;  
5897 ro13,12;  
5899 wi58;  
5901 rd13,14;  
5903 wi59;  
5905 st57;  
5907 dl58;  
5907 ro13,14;  
5909 wi57;  
5911 dl59;  
5911 rz10,11;  
5913 wa56;  
5915 dl60;  
5915 wt/nieprzyzw  
/;  
5932 wa56;  
5934 dz

FFT Z WIDMEM MOCY

<21.08.1976>

5761 dl18;		5913 dl18;		6019 rm1,1;
5761 st1;		5913 wo20;		6021 dl9;
5763 dl21;		5915 rz15,13;		6021 ro7,1;
5763 ww18;		5917 rz13,11;		6023 ms10;
5765 dl1;		5919 wo20;		6025 rz11,7;
5765 we4;		5921 rz9,8;		6027 wo14;
5767 wl10;		5923 dl7;		6029 pw7,10;
5769 cp0,0;		5923 rz3,7;		6031 wi0;
5771 wt/* FFT i WIDMO MOCY; n=/;		5925 rd3,8;		6033 st9;
5796 qy0,1;		5927 rz1,2;		6035 sk14;
5798 lr1,1;		5929 rd1,7;		6037 rz14,0;
5803 lr4,2;		5931 rd2,3;		6039 rz10,0;
5808 rz2,1;		5933 ur14,3;		6041 ro10,0;
5810 rz6,0;		5935 ur15,2;		6043 dl15;
5812 dl19;		5937 rm15,13;		6043 rz12,11;
5812 rm2,4;		5939 rm14,11;		6045 ri11,4;
5814 ro6,1;		5941 rd14,15;		6047 ro12,11;
5816 wi19;		5943 ur15,2;		6049 ro12,11;
5818 cp10,5;		5945 rm15,11;		6051 rz15,14;
5820 wt/nr wejścia dla ReZi:/;		5947 ur12,3;		6053 dl16;
5842 <u>we1;</u> ←		5949 rm12,13;		6053 ro15,1;
5844 st21;		5951 ro15,12;		6055 sr17;
5846 DZ		5953 ur10,7;		6057 rm12,4;
		5955 ro10,14;		6059 wi16;
		5957 zu10,3;		6061 dl17;
5761ww18;		5959 ur10,1;		6061 rd10,12;
5761 wl/w/;	5825 cp12,7;	5961 ro10,15;		6063 ro14,1;
5763 wl/e/;	5827 rm12,15;	5963 zu10,2;		6065 wi15;
5765 we4;	5829 lr10,.0083132;	5965 ur10,7;		6067 wa14;
5767 cp10,5;	5840 rd12,10;	5967 rd10,14;		6069 dl10;
5769 qy10,9;	5842 rm12,15;	5969 zu10,7;		6069 rz3,2;
5771 pw10,1;	5844 lr10,.166657-;	5971 ur10,1;		6071 ri3,4;
5773 wi2;	5854 rd12,10;	5973 rd10,15;		6073 rz8,2;
5775 <u>we1;</u>	5856 rm12,15;	5975 zu10,1;		6075 ts5,/B8889.8
5777 dl2;	5858 rd12,1;	5977 ri1,1;		6086 dl11;
5777 qy10,9;	5860 rm11,12;	5979 ro2,3;		6086 rz6,4;
5779 zu10,6;	5862 wa20;	5981 rd7,1;		6088 rd6,6;
5781 ro10,10;	5864 dl5;	5983 ro9,1;		6090 wl10;
5783 rd6,2;	5864 rz8,2;	5985 wi7;		6092 dl12;
5785 zu10,6;	5866 ri8,6;	5987 rd7,8;		6092 wl/*/;
5787 ro6,2;	5868 ri8,4;	5989 ro6,1;		6094 rd7,1;
5789 rd6,1;	5870 dl6;	5991 wi6;		6096 ur11,7;
5791 pw6,2;	5870 rz11,7;	5993 ro5,1;		6098 ur10,8;
5793 ms2;	5872 ri11,8;	5995 rz7,2;		6100 rd8,1;
5795 rz5,0;	5874 wo14;	5997 sr9;		6102 cq11,3;
5797 dl3;	5876 lr3,3.14159265;	5999 st3;		6104 ri11,2;
5797 rz7,0;	5889 rz15,3;	6001 dl0;		6106 pu11,5;
5799 rz6,1;	5891 rm15,4;	6001 ro1,4;		6108 rm11,11;
5801 ro7,5;	5893 rm15,10;	6003 dl8;		6110 ri10,2;
5803 dl4;	5895 ri15,2;	6003 ur11,7;		6112 rm10,10;
5803 sr5;	5897 rz13,3;	6005 ur12,10;		6114 rd11,10;
5805 rm6,4;	5899 ri13,4;	6007 zu12,7;		6116 pu11,5;
5807 ro7,1;	5901 ro13,15;	6009 zu11,10;		6118 ro6,1;
5809 st4;	5903 wi18;	6011 rd7,2;		6120 wi12;
5811 sk20;	5905 ro15,3;	6013 rd10,2;		6122 pw7,3;
5813 rz11,15;	5907 ro1,4;	6015 rm2,1;		6124 ms11;
5815 rm15,15;	5909 ri15,1;	6017 ms8;		6126 dz
5817 lr12,1852-;	5911 ri1,1;			

WIKI : \* Re A<sub>0</sub> |A<sub>0</sub>|<sup>2</sup> \* Re A<sub>1</sub> |A<sub>1</sub>|<sup>2</sup> \* ... \* Re A<sub>3</sub> |A<sub>3</sub>|<sup>2</sup>  
 \* Re A<sub>4</sub> |A<sub>4</sub>|<sup>2</sup> \*



# Testy transform

18.01.1977

\* FFT i WIDMO MOCY; n=5  
 nr wejścia dla ReZi:  
 \*\*\* X14,11;  
 5939 rd14,15:

\* FFT i WIDMO MOCY; n=5  
 nr wejścia dla ReZi:4

0 .6428 .1736 .5 .342 .342- .5- .1736- .6428- 0  
 .6428 .1736 .5 .342 .342- .5- .1736- .6428-  
 0 .6428 .1736 .5 .342 .342- .5- .1736- .6428-  
 0 .6428 .1736 .5 .342

		0		1		2		3			
*	0.051	0.002	*	0.055	0.003	*	0.072	0.005	*	0.160	0.025
*	0.155-	0.024	*	0.034-	0.001	*	0.012-	0.000	*	0.000	0.000
*	0.005	0.000	*	0.016	0.000	*	0.051	0.002	*	0.115-	0.017
*	0.030-	0.000 <sup>12</sup>	*	0.016-	0.000	*	0.009	0.001	*	0.023-	0.000
*	0.019-	0.000	*	0.023-	0.000	*	0.009	0.001	*	0.016-	0.000

we4;  
 1.465 5 8.536 10 10 10 10 10  
 10 10 10 10 10 10 10 10  
 10 10 10 10 10 10 10 10  
 10 10 8.536 5 1.465

*	9.062	82.119	*	0.906-	0.827	*	0.817-	0.693	*	0.686-	0.513
*	0.533-	0.332	*	0.379-	0.184	*	0.243-	0.085	*	0.137-	0.030
*	0.064-	0.008	*	0.022-	0.000	*	0.004-	0.000	*	0.000	0.000
*	0.000	0.000	*	0.001-	0.000	*	0.001-	0.000	*	0.000-	0.000
*	0.000	0.000	*	0.000-	0.000	*	0.001-	0.000	*	0.001-	0.000

we4  
 0 .64  
 0 6.428 9.848 8.66 3.42 3.42- 8.66-9.848-6.428-  
 0 6.428 9.848 8.66 3.42 3.42- 8.66-9.848-6.428-  
 0 6.428 9.848 8.66 3.42 3.42- 8.66-9.848-6.428-  
 0 6.428 9.848 8.66 3.42

				1		2		3			
*	0.886	0.784	*	0.960	0.923	*	1.287	1.672	*	3.031	9.391
*	3.251-	10.980	*	0.872-	0.804	*	0.454-	0.222	*	0.287-	0.090
*	0.200-	0.044	*	0.149-	0.024	*	0.116-	0.014	*	0.093-	0.009
*	0.078-	0.006	*	0.068-	0.004	*	0.061-	0.003	*	0.058-	0.003
*	0.056-	0.003	*	0.058-	0.003	*	0.061-	0.003	*	0.068-	0.004

we4  
 0 3.214 8.33 8.66 3.42 3.42-8.66-9.848-6.428-  
 0 6.428 9.848 8.66 3.42 3.42-8.66-9.848-6.428-  
 0 6.428 9.848 8.66 3.42 3.42-8.66-9.848-6.428-  
 0 6.428 8.33 4.33 0.51

*	0.464	0.215	*	0.564	0.318	*	0.963	0.927	*	2.811	8.010
*	3.353-	11.813	*	0.862-	0.829	*	0.354-	0.151	*	0.129-	0.021
*	0.018-	0.000	*	0.030	0.000	*	0.042	0.003	*	0.035	0.003
*	0.022	0.001	*	0.011	0.000	*	0.003	0.000	*	0.000	0.000
*	0.000-	0.000	*	0.000	0.000	*	0.003	0.000	*	0.011	0.000